

האם תוכל לעשות זאת בדרך שונה? על מטלות שלהן כמה פתרונות

פסיה צמיר, דינה תירוש, מיכל טבח ואסתר לוינסון

עיסוק במטלות שלהן כמה פתרונות נתפס כעיסוק חיובי במתמטיקה, אם כי לא נפוץ (Silver, Ghousseini, Gosen, Charalambous & Strawhun, 2005), ולו יתרונות אחדים. במאמרם הקלאסי, המסתמך על מחקר שנערך בקרב ילדים בכיתה ב', הגדירו יאקל וקוב (Yackel & Cobb, 1996) נורמות סוציו-מתמטיות והדגישו את חשיבות הדיון בשאלה מהם פתרונות דומים ומהם פתרונות שונים מבחינה מתמטית. לטענתם, הדיון בשאלה זו בגיל צעיר מעודד חשיבה ברמה גבוהה.

מקובל לקשור בין היכולת לפתור בעיה בכמה דרכים לבין יצירתיות. סילבר (Silver, 1997) טוען כי אפשר לפתח יצירתיות מתמטית בקרב כלל התלמידים באמצעות הצגת פעילויות מתמטיות מתאימות. יצירתיות מתמטית מאופיינת בשלוש תכונות מרכזיות: שטף, גמישות וחדשנות. לטענתו, עיסוק בבעיות שניתן לפתור בכמה דרכים מפתח תכונות אלה (Silver, 1997). לייקין (Leikin, 2007) טוענת כי פיתוח הרגל לפתור בעיה בדרכים שונות מקדם חשיבה מתמטית ברמות גבוהות ומוסיפה כי אפשר להשתמש בפתרונות שונים כדי לקשר ידע בתחומים שונים במתמטיקה וכך לחזק את הידע בכל אחד מתחומים אלה.

אשר לילדים בגן, בספרות המחקרית מדווח כי ילדים צעירים יכולים לעסוק בפתרון בעיות מתמטיות. חוקרים שונים (למשל, Carpenter, Ansell, Franke, Fennema, & Weisbeck, 1993) דיווחו כי ילדי גן פותרים בעיות חיבור, חיסור, כפל וחילוק תוך שימוש בעצמים מוחשיים. קלמנטס וסאראמה טוענים כי ילדים צעירים הם פותרים בעיות מרשימים - הם יכולים להעריך מצב נתון, לצפות התקדמות לקראת יעד מוגדר, להציב מטרות משנה ולתכנן את פעולותיהם לקראת פתרון ואף לבצען בהצלחה (Clements & Sarama, 2007).

תכנית הלימודים החדשה במתמטיקה לחינוך הקדם-יסודי (משרד החינוך, תשס"ח) מעודדת את העיסוק בפתרון בעיות: "יש לעודד פתרון בעיות בגיל הרך. זוהי התשתית ליכולת הילד להתמודד עם הנושא החשוב (והלא פשוט) של פתרון בעיות בהמשך דרכו". התכנית מפרטת יעדים הקשורים להשוואת מספר עצמים בשתי קבוצות: "הילד ידע להשוות בין קבוצות תוך שימוש בהתאמה חד-חד ערכית כדי לקבוע אם באחת מהן יש פחות, יותר או מספר שווה של עצמים". התכנית מציינת יעד נוסף להשוואת מספר עצמים בשתי קבוצות: "הילד ידע להשוות בין קבוצות באמצעות מנייה כדי לזהות קבוצות עם יותר, פחות או מספר שווה של עצמים". כלומר, התכנית ממליצה על שימוש בכמה דרכים להשוואת מספר העצמים (האיברים) בשתי קבוצות. מומלץ שהגננת תיצור סביבות למידה עשירות, המעודדות מתן פתרונות שונים לאותה מטלה.

במטלה שבה עוסק מאמר זה מוצגות שתי קבוצות ובכל אחת מספר שונה של איברים. ההנחיה היא ליצור שוויון במספר האיברים בשתי הקבוצות. המושג שוויון הוא מושג מרכזי במתמטיקה, והעיסוק בו מתחיל בגיל צעיר (Falkner, Levi & Carpenter, 1999).

נציג את המטלה:

יוצרים שוויון

המצב ההתחלתי: על השולחן מונחים 8 פקקים של בקבוקים, בשתי קבוצות: 3 פקקים בקבוצה האחת ו-5 פקקים בקבוצה השנייה.

שואלים: "אתה יכול ליצור שתי קבוצות שבהן מספר שווה של פקקים?"

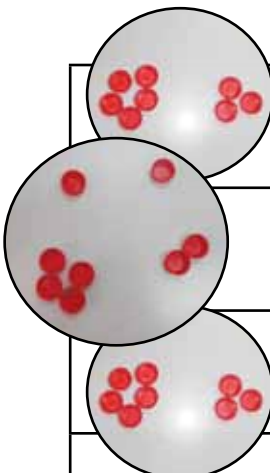
לאחר שהילד אמר שסיים, מחזירים את הפקקים למצב ההתחלתי (3 פקקים בקבוצה האחת ו-5 פקקים בקבוצה השנייה) ושואלים: "אתה יכול ליצור בדרך אחרת שתי קבוצות שבהן מספר שווה של פקקים?"

מחזירים את הפקקים למצב ההתחלתי ומבקשים למצוא דרך נוספת, כך עד אשר הילד אומר כי אין לו דרך נוספת.

נציג כעת את דרכי הביצוע של ארבעה ילדים בגני חובה: יונתן, אורית, שירן וניר. עבודתו של כל ילד תלווה בניתוח קצר.

הפתרון של יונתן

	הגננת "אתה יכול ליצור שתי קבוצות שבהן מספר שווה של פקקים?"	הגננת
	יונתן מהנהן בראשו, מעביר פקק אחד מהקבוצה שבה 5 פקקים לקבוצה השנייה, יוצר שתי קבוצות שבכל אחת 4 פקקים.	יונתן
	הגננת "יפה". מחזירה את הפקקים למצב ההתחלתי. "אתה יכול ליצור בדרך אחרת שתי קבוצות שבהן מספר שווה של פקקים?"	הגננת
	יונתן "אפשר להוציא?"	יונתן
	הגננת "כן".	הגננת
	יונתן מוציא 3 פקקים מהקבוצה של חמשת הפקקים ומוציא פקק אחד מהקבוצה של שלושת הפקקים, יוצר שתי קבוצות שבכל אחת שני פקקים.	יונתן
	הגננת "יפה". מחזירה את הפקקים למצב ההתחלתי. "אתה יכול ליצור בדרך אחרת שתי קבוצות שבהן מספר שווה של פקקים?"	הגננת
	יונתן מסתיר את הפקקים ואומר: "שתי קבוצות של אפס".	יונתן
	הגננת "יפה". מחזירה את הפקקים למצב ההתחלתי. "אתה יכול ליצור בדרך אחרת שתי קבוצות שבהן מספר שווה של פקקים?"	הגננת
	יונתן מוציא שני פקקים מהקבוצה של חמשת הפקקים ויוצר שתי קבוצות של 3 פקקים.	יונתן



הגננת	"יפה". מחזירה את הפקקים למצב ההתחלתי. "אתה יכול ליצור בדרך אחרת שתי קבוצות שבהן מספר שווה של פקקים?"
יונתן	מוציא 4 פקקים מהקבוצה של חמשת הפקקים, מוציא שני פקקים מהקבוצה של שלושת הפקקים, ויוצר שתי קבוצות של פק אחד.
הגננת	"יפה". מחזירה את הפקקים למצב ההתחלתי. "אתה יכול ליצור בדרך אחרת שתי קבוצות שבהן מספר שווה של פקקים?"
יונתן	מניד בראשו לשלילה.

ניתוח הפתרון של יונתן

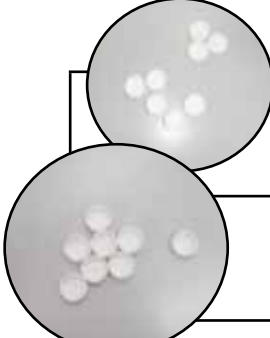
יונתן נקט כמה דרכי פעולה וכולן נתנו מענה על דרישות המטלה: יצירת שתי קבוצות ובהן מספר שווה של פקקים. נדון בשני מרכיבים בכל פתרון של יונתן: דרך הפעולה והתוצאה.

יונתן הציג חמש תוצאות. בתוצאה הראשונה הונחו 4 פקקים בכל קבוצה; נסמן זאת כך: (4-4). בתוצאה השנייה הונחו שני פקקים בכל קבוצה (2-2). בתוצאה השלישית נוצרו שתי קבוצות ללא פקקים, כלומר (0-0). בתוצאה הרביעית נוצרו שתי קבוצות ובכל אחת 3 פקקים, (3-3). בתוצאה החמישית נוצרו שתי קבוצות ובכל אחת פק אחד (1-1). אלה הן כל התוצאות האפשריות.

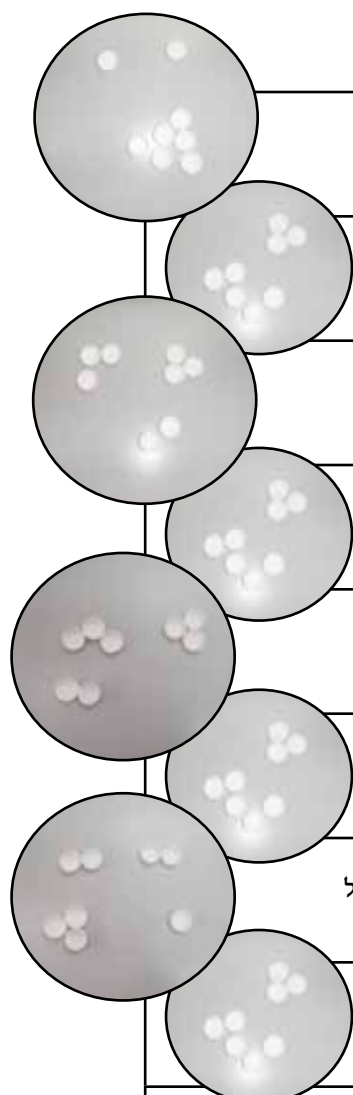
דרכי הפעולה של יונתן מגוונות. הדרך הראשונה הייתה **העברה בין הקבוצות**: העברה של פק מהקבוצה שבה 5 פקקים לקבוצה שבה 3 פקקים. הדרך השנייה הייתה **הוצאת פקקים משתי הקבוצות**: יונתן הפעיל דרך זו פעמיים – פעם אחת לקבלת התוצאה (2-2) ופעם אחת לקבלת התוצאה (1-1). הדרך השלישית שנקט יונתן הייתה **הוצאת כל הפקקים משתי הקבוצות**, (0-0). דרך זו דומה לדרך הקודמת שהוזכרה; גם במקרה זה הוציא יונתן פקקים משתי הקבוצות, אולם ההבנה כי קבוצה יכולה להיות נטולת פקקים אינה פשוטה ולכן נתייחס לדרך זו כאל דרך נפרדת. הדרך הרביעית שנקט יונתן הייתה **הוצאה מקבוצה אחת בלבד**. דרך זו הובילה לתוצאה (3-3).

יונתן המעיט לדבר במהלך הפעילות. באמצעות השאלה "אפשר להוציא?" שהציג ביוזמתו, הוא בירר מה מותר ומה אסור, כלומר אם מותר להוציא פקקים. הוא הבין שיש "כללי משחק" שעל פיהם עליו לפעול וכי לא תמיד הם נאמרים במפורש. בפעם השנייה שיונתן דיבר, הוא ציין "שתי קבוצות של אפס". אמירה זו קשורה לפתרון המיוחד שתוצאתו (0-0). ייתכן שהוא בחר לומר זאת עקב "אי הנראות" של הקבוצות. יש לציין כי הרעיון שקבוצה יכולה להכיל אפס איברים – קבוצה ריקה – הוא רעיון מורכב, הנוגד את התפיסה האינטואיטיבית של מושג הקבוצה (Linchevsky & Vinner, 1998).

הפתרון של אורית



הגננת	"את יכולה ליצור שתי קבוצות שבהן מספר שווה של פקקים?"
אורית	אוספת את כל הפקקים לערמה, מתחילה לחלק, מארגנת שתי קבוצות לא שוות, באחת 7 פקקים ובשנייה פק אחד.
הגננת	"האם הקבוצות שוות?"



אורית	"לא". אוספת שוב את כל הפקקים לערמה, מוציאה ממנה שני פקקים, מניחה אותם בשני קצות השולחן, יוצרת שתי קבוצות שבכל אחת פקק אחד.
הגננת	"יפה". מחזירה את הפקקים למצב ההתחלתי. "את יכולה ליצור בדרך אחרת שתי קבוצות שבהן מספר שווה של פקקים?"
אורית	אוספת שוב את כל הפקקים לערמה, מונה 3 פקקים ומניחה אותם בצד אחד, מונה עוד 3 פקקים ומניחה בצד השני, יוצרת שתי קבוצות שבכל אחת 3 פקקים.
הגננת	"יפה". מחזירה את הפקקים למצב ההתחלתי. "את יכולה ליצור בדרך אחרת שתי קבוצות שבהן מספר שווה של פקקים?"
אורית	מוציאה שני פקקים מהקבוצה של חמשת הפקקים, יוצרת שתי קבוצות שבכל אחת 3 פקקים.
הגננת	"יפה". מחזירה את הפקקים למצב ההתחלתי. "את יכולה ליצור בדרך אחרת שתי קבוצות שבהן מספר שווה של פקקים?"
אורית	מוציאה 3 פקקים מהקבוצה של חמשת הפקקים, מוציאה פקק אחד מהקבוצה של שלושת הפקקים ומניחה בצד השני, יוצרת שתי קבוצות שבכל אחת שני פקקים.
הגננת	"יפה". מחזירה את הפקקים למצב ההתחלתי. "את יכולה ליצור בדרך אחרת שתי קבוצות שבהן מספר שווה של פקקים?"
אורית	"מספיק".

נייתוח הפתרון של אורית

עבודתה של אורית במטלה מציגה דרך פעולה נוספת, והיא **איסוף וחלוקה מחדש**, כלומר אורית אוספת את הפקקים משתי הקבוצות לקבוצה אחת ואחר כך יוצרת שתי קבוצות בנות איבר אחד (1-1); שאר הפקקים נותרים בצד. לאחר מכן היא שוב אוספת את הפקקים ויוצרת שתי קבוצות שבכל אחת מהן 3 פקקים (3-3) ושניים נותרים בצד. זו אינה דרך הביצוע היחידה של אורית – היא משתמשת בשתי דרכים נוספות (שבהן השתמש גם יונתן) – **הוצאה מקבוצה אחת בלבד וכן הוצאה משתי הקבוצות**.

התבוננות בתוצאות הסופיות של עבודתה של אורית מעלה גם היא תופעה חדשה – הגעה לתוצאה שאינה עומדת בתנאים של הבעיה. התוצאה הראשונה של אורית, (7-1), אינה שומרת על שוויון במספר הפקקים. אורית מבחינה בכך בעקבות השאלה של הגננת ופועלת בהמשך תוך שמירה על העיקרון של הצגת שתי קבוצות ובהן אותו מספר של פקקים. התוצאות שקיבלה הן (1-1), (3-3), ו- (2-2), כלומר שלוש מתוך חמש התוצאות האפשריות.

אורית יצרה את התוצאה (3-3) בשתי דרכים שונות (איסוף וחלוקה מחדש והוצאה מקבוצה אחת), כלומר, יש תוצאות שניתן לקבלן בדרכים שונות.

עבודתה של שירן

	הגננת	"את יכולה ליצור שתי קבוצות שבהן מספר שווה של פקקים?"
	שירן	מעבירה פקק אחד מהקבוצה של חמשת הפקקים לקבוצה של שלושת הפקקים ויוצרת שתי קבוצות שבהן 4 פקקים בכל אחת.
	הגננת	"יפה". מחזירה את הפקקים למצב ההתחלתי. "את יכולה ליצור בדרך אחרת שתי קבוצות שבהן מספר שווה של פקקים?"
	שירן	שבה ומעבירה פקק אחד מהקבוצה של חמשת הפקקים לקבוצה של שלושת הפקקים, אולם הפעם הפקק שהעבירה שונה מהפקק שהעבירה קודם לכן.
	הגננת	"יפה". מחזירה את הפקקים למצב ההתחלתי. "את יכולה ליצור בדרך אחרת שתי קבוצות שבהן מספר שווה של פקקים?"
	שירן	שבה ומעבירה פקק אחד מהקבוצה של חמשת הפקקים לקבוצה של שלושת הפקקים, אולם הפעם הפקק שהעבירה שונה מהפקק שהעבירה קודם לכן.

ניתוח הפתרון של שירן

שירן נקטה דרך פעולה אחת – **העברה בין קבוצות** ולכן התוצאה היחידה שהתקבלה היא (4-4). כל הפקקים היו זהים, ולמרות זאת שירן ייחסה חשיבות לזהות הפקק המסוים שהעבירה מקבוצה לקבוצה. מבחינתה, העברה של פקק אחר יצרה פתרון שונה.

עבודתו של ניר

	הגננת	"אתה יכול ליצור שתי קבוצות שבהן מספר שווה של פקקים?"
	ניר	מוציא שני פקקים מהקבוצה של חמשת הפקקים, מסדר את הפקקים בשתי הקבוצות במבנה שבו כל פקק הוא קדקוד של משולש שווה-צלעות.
	הגננת	"יפה". מחזירה את הפקקים למצב ההתחלתי. "אתה יכול ליצור בדרך אחרת שתי קבוצות שבהן מספר שווה של פקקים?"
	ניר	שב ומוציא שני פקקים מהקבוצה של חמשת הפקקים, הפעם מארגן את הפקקים בשתי הקבוצות בשתי שורות.

	הגננת	"יפה". מחזירה את הפקקים למצב ההתחלתי. "אתה יכול ליצור בדרך אחרת שתי קבוצות שבהן מספר שווה של פקקים?"
	ניר	שב ומוציא שני פקקים מהקבוצה של חמשת הפקקים, מארגן את הפקקים כמו במקרה הראשון, אבל במרחק גדול יותר בין פקק לפקק בכל קבוצה.
	הגננת	"יפה". מחזירה את הפקקים למצב ההתחלתי. "אתה יכול ליצור בדרך אחרת שתי קבוצות שבהן מספר שווה של פקקים?"
	ניר	שב ומוציא שני פקקים מהקבוצה של חמשת הפקקים, הפעם מארגן בשתי שורות ברווחים גדולים יותר בין פקק לפקק.
	הגננת	"יפה". מחזירה את הפקקים למצב ההתחלתי. "אתה יכול ליצור בדרך אחרת שתי קבוצות שבהן מספר שווה של פקקים?"
	ניר	שב ומוציא שני פקקים מהקבוצה של חמשת הפקקים, הפעם מארגן בשתי קבוצות כמו במקרה הראשון.

ניתוח הפתרון של ניר

כל אחת מהתוצאות של ניר הניבה שתי קבוצות שבכל אחת 3 פקקים (3-3). מבחינת ניר, התוצאות שונות זו מזו בשל השוני בארגון הפקקים במרחב: המרחקים ביניהם (קרובים או רחוקים) והתצורה שלהם (משולש או קטע). לעתים הקריטריון המתמטי להגדרת שוני המנחה את ניר הוא הארגון במרחב; בהנדסה, למשל, קטע שונה ממשולש. עם זאת, מבחינת מספר הפקקים בכל קבוצה, ארבע התוצאות הסופיות של ניר זהות: (3-3).

מבחינת דרכי הפעולה, ניר השתמש בהוצאה מקבוצה אחת בלבד.

מילות סיכום

במאמר זה הצגנו את המטלה "יוצרים שוויון" העוסקת בהשוואת מספר העצמים בשתי קבוצות.

מטלה זו אינה שגרתית והיא עשויה להניב חמש תוצאות אפשריות: (4-4), (3-3), (2-2), (1-1), (0-0). בנוסף, תיאורנו חמש דרכים לפתרון המטלה: העברה בין הקבוצות, הוצאת פקקים משתי הקבוצות, הוצאת כל הפקקים משתי הקבוצות, הוצאה מקבוצה אחת בלבד, איסוף כל הפקקים לקבוצה אחת ואחר כך חלוקתם לקבוצות.

מעניין כי באחת הדרכים - איסוף כל הפקקים לקבוצה אחת ואחר כך חלוקתם לקבוצות - אפשר לקבל את כל חמש התוצאות. הדרכים האחרות מוליכות לתוצאה אחת או יותר, על פי הפירוט:

- ▶ הדרך של העברה בין הקבוצות מובילה לתוצאה אחת, (4-4).
- ▶ הדרך של הוצאה מקבוצה אחת מובילה גם היא לתוצאה אחת, (3-3).
- ▶ הדרך של הוצאת פקקים משתי הקבוצות מובילה לשתי תוצאות שונות, (2-2) ו-(1-1).
- ▶ הדרך של הוצאת כל הפקקים מובילה לתוצאה אחת, (0-0). אפשר לראות דרך זו כמקרה פרטי של הדרך הוצאת פקקים משתי הקבוצות. החלטנו להתייחס אל מקרה זה בנפרד משני טעמים: (א) בדרך של סילוק כל האיברים יש פשטות, כי אין צורך להתייחס למספר האיברים בכל קבוצה; (ב) קבלת התוצאה (0-0) כרוכה בקושי מבחינה פסיכולוגית.

הקביעה מהו פתרון שונה ומהו פתרון זהה תלויה בהקשר (Sfard & Lavie, 2005). ההבחנה נעשית על סמך קריטריונים מסוימים, לעתים גלויים ולעתים סמויים. ניר, אורית, שירן ויונתן הציגו פתרונות שונים למטלה. יונתן הציג חמש תוצאות ובשתיים מהן הוא השתמש באותה דרך (הוצאת פקקים משתי הקבוצות). בדרך זו הוא הגיע לתוצאות (2-2), (1-1). אורית יצרה את התוצאה (3-3) בשתי דרכים שונות (איסוף וחלוקה מחדש והוצאה מקבוצה אחת). שירן וניר פעלו על פי קריטריונים לא רלוונטיים כדי להציג פתרונות שונים. השאלה המתבקשת היא אם הפתרונות שהצגנו אופייניים לילדים בגן חובה. כאשר נבחנו עבודתם של 163 ילדים בביצוע המטלה, נמצא כי שלושה פעלו בדרך שבה פעלה שירן – הם "זכרו" את הפקקים הספציפיים בכל קבוצה והציגו אותם כקבוצה שונה, קבוצה שהורכבה מפקקים שונים. ארבעה פעלו בדרך שבה פעל ניר – כלומר הקריטריון לשוני בין התוצאות היה ארגון הפקקים במרחב. האחרים פעלו בדומה ליונתן ולאורית, והציגו דרכים ותוצאות שונות בהתאם לתנאי המטלה. עם זאת, מעטים הציגו את התוצאה (0-0).

מרבית הילדים לא ליוו את פתרון המטלה בהערות מילוליות. עם זאת, אחדים העירו הערות, כמו "יש לי עוד תכנית". חלקם העירו על הקבוצות שהציגו, למשל "את זה כבר עשיתי" או "אני לא זוכר אם כבר היה לי כזה". הערות אלה מעידות על קושי הקשור במעקב אחרי תוצאות שכבר הושגו, כלומר, העיסוק במטלה זו מציב צורך בתיעוד הפתרונות. ניתן לתעד את הפתרונות באמצעים שונים, כמו שימוש במדבקות, למשל.

ילדים אחדים הציגו תוצאה אחת או שתיים המתאימות לתנאי המטלה ולאחר מכן המשיכו להציג תוצאות שלא עמדו בתנאי המטלה, למשל ארבע קבוצות שבכל אחת מהן שני פקקים או שתי קבוצות שבכל אחת מספר שונה של פקקים. כלומר, ילדים אלה ויתרו על אחד מתנאי המטלה (למשל על הבקשה ליצור שתי קבוצות או על הבקשה לשמור על מספר שווה של פקקים בשתי הקבוצות). ילדים אחדים ביטאו בדרכים שונות את הרעיון שמיצו את הדרכים לפתרון המטלה. היו שענו "לא" על השאלה החוזרת "אתה יכול ליצור בדרך אחרת שתי קבוצות שבהן מספר שווה של פקקים?"; אחרים ענו "אין עוד דרכים", והיו שאמרו "אני לא מוצא עוד". האמירה האחרונה עשויה להצביע על הבנה כי יש דרכים נוספות, אולם אני, הילד, אינני מוצא אותן.

כיצד ניתן ליישם רעיונות אלה בגן? אפשר להפעיל מטלה זו עם ילד אחד או עם קבוצת ילדים. הגננת יכולה לעודד את הילדים לשוחח ביניהם על הפתרונות השונים, במה הם דומים, במה הם שונים והאם יש פתרונות נוספים.



פעילות במתמטיקה בגן לוטוס בכרמיאל בניהולה של הגננת שרון דהאן

במטלה שהוצגה כאן, **יוצרים שוויון**, הוצגו שתי קבוצות שבאחת 3 פקקים ובאחרת 5 פקקים. ניתן לחשוב על מצבים התחלתיים שונים. למשל, מספר אי-זוגי אחר של פקקים בכל קבוצה; מספר זוגי של פקקים בכל קבוצה; מספר אי-זוגי של פקקים בקבוצה האחת (למשל 3 פקקים) ומספר זוגי בקבוצה השנייה (למשל 4 פקקים). במצב זה לא ניתן ליצור קבוצות שוות תוך שימוש בכל הפקקים.

הראנו כי ילדים בני חמש מציעים תוצאות שונות ופועלים בדרכים שונות; כלומר, הילדים גילו גמישות מחשבתית בעת העיסוק במטלה.

הצגנו מטלה זו גם למבוגרים, במסגרות השתלמויות שונות. בדרך כלל התוצאה היחידה שהציעו המבוגרים הייתה (4-4) בדרך של העברת פקק אחד מקבוצה לקבוצה. כלומר, המבוגרים הניחו כי יש להשתמש בכל הפקקים המוצגים על השולחן. לאחר שהובהר כי אין מגבלה כזו, הוצגו מיד הצגת התוצאות האחרות (כולל תוצאת 0-0). נסכם בכך שילדים ומבוגרים עשויים לצאת נשכרים מהתרת בעיות שלהן כמה תוצאות בדרכים שונות.

פרופ' דינה תירוש, החוג לחינוך מתמטי, מדעי וטכנולוגי, אוניברסיטת תל אביב
פרופ' פסיה צמיר, החוג לחינוך מתמטי, מדעי וטכנולוגי, אוניברסיטת תל אביב
ד"ר מיכל טבח, חוקרת בחוג לחינוך מתמטי, מדעי וטכנולוגי, אוניברסיטת תל אביב
ד"ר אסתר לוינסון, חוקרת בחוג לחינוך מתמטי, מדעי וטכנולוגי, אוניברסיטת תל אביב

לקריאה נוספת

משרד החינוך (תשס"ח). תכנית הלימודים במתמטיקה לגיל הקדם-יסודי.

Carpenter, T., Ansell, E., Franke, M., Fennema, E., & Weisbeck, L. (1993). Models of problem solving: A study of kindergarten children's problem solving processes. *Journal for Research in Mathematics Education*, 24(5), 427-440.

Clements, H. D., & Sarama, J. (2007). Early childhood mathematics learning. In Frank K. Lester, Jr. (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, (pp. 461-556). New York: Information Age Publishing.

Falkner, K., Levi, L., & Carpenter, T. P. (1999). Children's understanding of equality: A foundation for algebra. *Teaching Children Mathematics*, 6(4), 232-237.

Leikin, R. (2007). Habits of mind associated with advanced mathematical thinking and solution spaces of mathematical tasks. Paper presented at the Working Group on Advanced Mathematical Thinking— Cyprus: CERME-5.

Linchevsky, L., & Vinner, S. (1998). The naïve concept of sets in elementary teachers', *Proceedings of the 12th International Conference Psychology of Mathematics Education*, Vol. 1, pp. 471-478. Vezprem, Hungary.

Sfard, A., & Lavie, I. (2005). Why cannot children see as the same what grown-ups cannot see as different? Early numerical thinking revisited. *Cognition and Instruction*, 23(2), 237-309.

Silver, E. A. (1997). Fostering creativity through instruction rich mathematical problem solving and problem posing. *ZDM The International Journal of Mathematics Education*, 29(3), 75-80.

Silver, E. A., Ghouseini, H., Gosen, D., Charalambous, C., & Font Strawhun, B. T. (2005). Moving from rhetoric to praxis: Issues faced by teachers in having students consider multiple solutions for problems in the mathematics classroom. *Journal of Mathematical Behavior*, 24, 287-301.

Yackel, E., & Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(4), 458-477.